Compito di Geometria e algebra lineare del 30 gennaio 2023

Istruzioni: Avete 3 ore di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo $\mathbb{R}$ e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa. Se è vera darne una dimostrazione, se è falsa fare un controesempio.

a) Se v_1, v_2, v_3 sono una base di V allora $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$ sono una base di V.
b) Se F è diagonalizzabile e $v \in V$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $F(v) = \lambda v$.
c) Se $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$ sono una base di V allora v_1, v_2, v_3 sono una base di V.

Esercizio 2. Sia U, V e W i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2\,x_2 - x_3 - x_4 = x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

$$W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\2\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\5\end{pmatrix} \right\}$$

(1) Dare una parametrizzazione di $U \cap V$.
(2) Calcolare la dimensione di $U \cap W$.

Esercizio 3. Siano r e s due rette distinte passanti per l'origine di $\mathbb{R}^3$. Sia P la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su r e Q la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su s.

a) Per quali coppie di rette r ed s si ha $PQ = QP$?
b) Dimostrare che PQ è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il prodotto scalare g_s dipendente dal parametro $s \in \mathbb{R}$ associato alla matrice

$$B_s = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+s^2\end{pmatrix}$$

Al variare del parametro t si consideri il l'applicazione lineare $F_t \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix}0 & 4 & 8 & 1+t^2\\ 2 & 11 & 13 & 0\\ 4 & 13 & 17 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

a) Per quali t l'applicazione F_t è autoaggiunta rispetto al prodotto g_s?
b) Dimostra che F_t è diagonalizzabile per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione dell'esercizio 1. L'affermazione a) è falsa. Se per esempio $F = 0$ e v_1, v_2, v_3 sono una base qualsiasi di V allora $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$ non sono una base di V.

L'affermazione b) pure è falsa. Se $V = \mathbb{R}^3$ e $F = L_A$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $v = e_1 + e_2$ allora F è diagonalizzabile e $F(v) = e_1$ che non è un multiplo di v.

L'affermazione c) è vera. Basta dimostrare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Supponiamo che $a, b, c \in \mathbb{R}$ e che

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0,$$

vogliamo dimostrare che a, b, c sono nulli. Applicando F alla formula precedente otteniamo

$$aF(v_1) + bF(v_2) + cF(v_3) = 0.$$

Poiché sappiamo che $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$ sono una base, e quindi sono linearmente indipendenti, ne ricaviamo che a, b, c sono nulli.

Soluzione dell'esercizio 2. a) Sia $u = e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4$ e $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 2e_4$. Un generico vettore di U si scrive come

$$u = au_1 + bu_2 = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+3b \\ 2a+2b \\ a+2b \end{pmatrix}.$$

Un tale vettore appartiene a V solo se verifica le equazioni $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$ e $x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$ che per un tale vettore diventano

$$(a+b) + 2(2a+3b) - (2a+2b) - (a+2b) = 0 \quad e \quad (a+b) + 3(2a+3b) + (a+2b) = 0$$

ovvero $2a + 3b = 0$ e $8a + 12b = 0$. La seconda equazione è multipla della prima e quindi rimane l'unica equazione $b = -3/2a$. Quindi l'intersezione di U e V è l'insieme dei vettori

$$au_1 - \frac{3}{2}au_2 = -\frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In particolare l'applicazione $t \mapsto t(e_1 + 2e_3 - e_4)$ è una parametrizzazione di $U \cap V$.

b) Mettendo assieme i 4 generatori di U e W si ottengono i generatori di $U + W$. La matrice che si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ha rango tre (si vede con le mosse di Gauss). Quindi $\dim(U + W) = 3$. Applicando la formula di Grassmann si ottiene

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Soluzione dell'esercizio 3. Siano u e v due vettori di norma 1 che generano le rette r ed s rispettivamente. Possiamo scrivere la proiezione su r e s mediante le seguenti formule:

$$P(w) = \langle w, u \rangle u \qquad Q(w) = \langle w, v \rangle v.$$

Quindi

$$PQ(w) = \langle w, v \rangle \langle v, u \rangle u \qquad QP(w) = \langle w, u \rangle \langle v, u \rangle v.$$

Affrontiamo ora il punto a). Se $\langle u, v \rangle = 0$ cioè se le rette sono ortogonali vediamo che le due applicazioni sono entrambe uguali a zero.

Se $u = \pm v$, cioè se le rette sono la stessa retta, allora $P = Q$ e $PQ = QP = P^2 = P$.

Se le rette non sono né uguali, né ortogonali dimostriamo che $PQ \neq QP$. Applicando le due possibili composizioni ad u otteniamo

$$PQ(u) = \langle u, v \rangle \langle v, u \rangle u \qquad QP(u) = \langle u, u \rangle \langle v, u \rangle v = \langle v, u \rangle v$$

Osserviamo che il primo vettore è diverso da zero ed è sulla retta r mentre il secondo vettore è diverso da zero e è sulla retta s, quindi non possono essere uguali.

b) Distinguiamo due casi. Se le rette sono ortogonali allora $PQ = 0$ e quindi è diagonalizzabile. Se le rette non sono ortogonali, cioè se $\langle u, v\rangle \neq 0$ allora il nucleo di PQ è l'insieme delle w tali che $\langle w, v\rangle = 0$ ed è quindi il piano ortogonale a s. Inoltre

$$PQ(u) = \langle u, v\rangle^2 u$$

Quindi u è un autovettore di autovalore $\langle u \cdot v\rangle^2$. Se prendiamo come base di $\mathbb{R}^3$ una terna di vettori v_1, v_2, v_3 in cui v_1 e v_2 sono una base del piano ortogonale a s e $v_3 = u$, osserviamo che sono una base di autovettori di PQ.

L'esercizio si può fare anche scegliendo una base ortonormale in cui le due rette sono molto semplici, per esempio una base in cui v_1 era un generatore di r e v_1, v_2 era una base del piano generato da r e s. In una base simile i conti erano molto semplici.

Soluzione dell'esercizio 4. a) Ricordiamo che F_t è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare g_s se

$$g_s(F_t(u), v) = g_s(u, F_t(v)).$$

A livello di matrici questo corrisponde all'equazione

$$A_t^{trasposta} \cdot B_s = B_s \cdot A_t$$

ovvero nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 1+s^2 \\ 4 & 22 & 26 & 0 \\ 8 & 26 & 34 & 0 \\ 1+t^2 & 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 1+t^2 \\ 4 & 22 & 26 & 0 \\ 8 & 26 & 34 & 0 \\ 1+s^2 & 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che questo corrisponde all'equazione $t^2 = s^2$, ovvero $t = \pm s$.

b) Osserviamo che per ogni s il prodotto scalare g_s è definito positivo perché la martrice è diagonale con numeri positivi sulla diagonale. Poiché F_t è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare g_t, applicando il teorema spettrale ne deduciamo che F_t è diagonalizzabile.